

第1讲全等三角形基础(加油站)

一、全等三角形的概念与性质

练习1

1. 下列说法：①能够完全重合的图形叫做全等形；

②全等三角形的对应边相等、对应角相等；

③全等三角形的周长相等、面积相等；

④所有的等边三角形都全等；

⑤面积相等的三角形全等．

其中正确的说法有（ ）．

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】 B

【解析】 ①中能够完全重合的图形叫做全等形，正确；

②中全等三角形的对应边相等、对应角相等，正确；

③全等三角形的周长相等、面积相等，也正确；

④中所有的等边三角形角都是 60° ，但由于边不相等，所以不能说其全等，④错误；

⑤中面积相等的三角形并不一定是全等三角形，⑤中说法错误；

故题中①②③说法正确，④⑤说法错误．

故选B．

【标注】【知识点】全等形的定义

2. 下列说法：

①形状相同的图形是全等形；

②全等图形的大小相同，形状也相同；

③全等三角形的面积相等；

④面积相等的两个三角形全等；

⑤若 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ ， $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle A_2B_2C_2$ ，则 $\triangle ABC \cong \triangle A_2B_2C_2$ ．

则正确的说法有（ ）．

A. 2个

B. 3个

C. 4个

D. 5个

【答案】 B

【解析】 ①形状且大小都相同的图形才是全等形，①错误；

②全等图形的大小、形状都相同，②正确；

③全等三角形的面积相等，③正确；

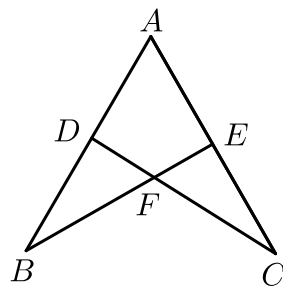
④面积相等的两个三角形不一定全等，④错误；

⑤是正确的；故选B .

【标注】 【知识点】 全等三角形的周长与面积

练习2

3. 如图，已知 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，下列结论错误的是（ ） .



A. $AD = AE$

B. $DB = AE$

C. $DF = EF$

D. $DB = EC$

【答案】 B

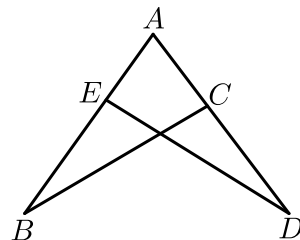
【解析】 $\because \triangle ABE \cong \triangle ACD$,

$\therefore AD = AE$, $AB = AC$,

$\therefore DB = EC$.

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

4. 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，若 $AB = 7$ ， $AC = 3$ ，则 $BE =$ _____ .



【答案】 4

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$,

$$\therefore AB = AD, AC = AE,$$

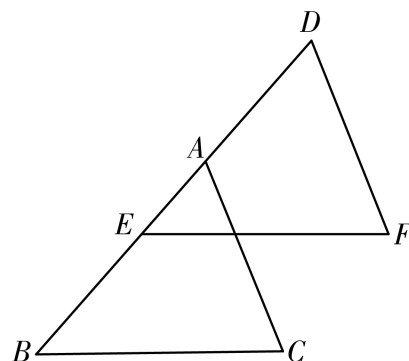
$$\because AB = 7, AC = 3.$$

$$\therefore AD = 7, AE = 3.$$

$$\therefore BE = AB - AE = 7 - 3 = 4.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

5. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $BE = 4$, $AE = 1$, 则 DE 的长是 _____.



【答案】5

【解析】 $\because BE = 4, AE = 1$,

$$\therefore AB = BE + AE = 4 + 1 = 5,$$

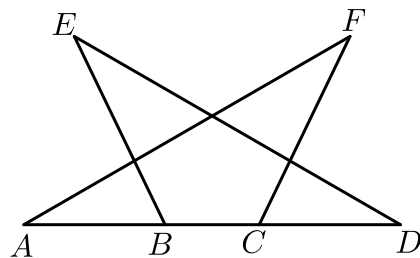
$$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

$$\therefore DE = AB = 5.$$

故答案为: 5.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

6. 如图, $\triangle ACF \cong \triangle DBE$, 若 $AB = 4.5$, $BC = 3$, 则线段 AD 的长是 _____.



【答案】12

【解析】 $\because \triangle ACF \cong \triangle DBE$,

$$\therefore AC = DB,$$

$$\therefore AD = AB + BC + CD,$$

$$AB = 4.5, BC = 3,$$

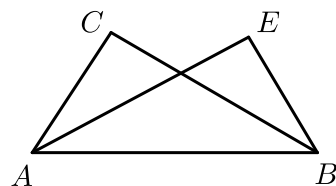
$$\therefore AD = 12.$$

故答案为：12.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

练习3

7. 如图，已知， $\triangle ABC \cong \triangle BAE$ ， $\angle ABE = 60^\circ$ ， $\angle E = 92^\circ$ ，则 $\angle ABC$ 的度数为 _____ 度.



【答案】28

【解析】 $\because \angle ABE = 60^\circ$ ， $\angle E = 92^\circ$ ，

$$\therefore \angle BAE = 28^\circ,$$

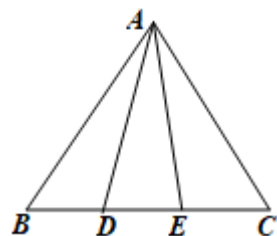
又 $\because \triangle ABC \cong \triangle BAE$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle BAE = 28^\circ,$$

故答案为：28.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

8. 如图，点B、D、E、C在一条直线上， $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ， $\angle AEC = 110^\circ$ ，则 $\angle DAE$ 的度数是 () .



A. 30°

B. 40°

C. 50°

D. 60°

【答案】 B

【解析】 $\because \triangle ABD \cong \triangle ACE$,

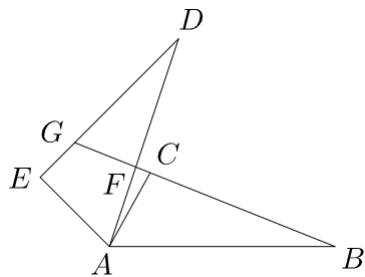
$$\therefore \angle ADB = \angle AEC = 110^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED = 40^\circ.$$

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

9. 如图, 已知 $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, 且 $\angle CAD = 10^\circ$, $\angle B = 25^\circ$, $\angle EAB = 120^\circ$, 则 $\angle DFB$ 的度数为 _____ 度.



【答案】 90

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$,

$$\therefore \angle D = \angle B = 25^\circ, \angle DAE = \angle BAC,$$

$$\text{又} \because \angle CAD = 10^\circ, \angle EAB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC = \frac{1}{2}(\angle EAB - \angle CAD) = \frac{1}{2}(120^\circ - 10^\circ) = 55^\circ,$$

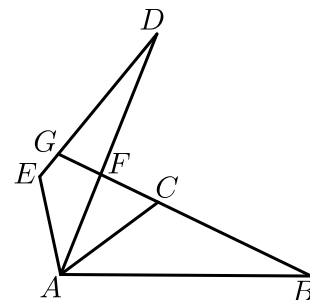
$$\therefore \angle DFB = \angle BAF + \angle B = \angle FAC + \angle CAB + \angle B$$

$$= 10^\circ + 55^\circ + 25^\circ = 90^\circ.$$

故答案为: 90.

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

10. 如图, $\triangle ABC \cong \triangle ADE$, BC 的延长线交 DA 于 F , 交 DE 于 G , $\angle D = 25^\circ$, $\angle E = 105^\circ$, $\angle DAC = 16^\circ$, 则 $\angle DGB =$ _____.



【答案】 66°

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$,

$$\therefore \angle ACB = \angle E = 105^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ,$$

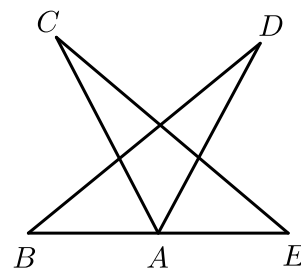
在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle DGF$ 中, $\angle D + \angle DGB = \angle DAC + \angle ACF$,

$$\text{即 } 25^\circ + \angle DGB = 16^\circ + 75^\circ,$$

$$\text{解得 } \angle DGB = 66^\circ.$$

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

11. 如图, 点 B 、 A 、 E 在同一直线上, $\triangle ADB \cong \triangle ACE$, $\angle E = 40^\circ$, $\angle C = 25^\circ$, 则 $\angle DAC$ 的度数为 _____ $^\circ$.



【答案】 50

【解析】 $\triangle ACE$ 中, $\angle C = 25^\circ$, $\angle E = 40^\circ$,

$$\therefore \angle CAE = 180^\circ - \angle C - \angle E = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ = 115^\circ,$$

$\because A, B, E$ 共线,

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle CAE = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ,$$

$\because \triangle ADB \cong \triangle ACE$,

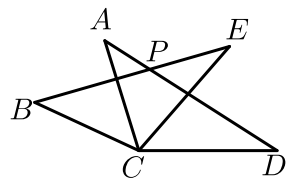
$$\therefore \angle BAD = \angle CAE = 115^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAD - \angle BAC = 115^\circ - 65^\circ = 50^\circ.$$

故答案为: 50.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

12. 如图 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$ ，若 $AC = BC$ ， $AD = BE$ ， $CD = CE$ ， $\angle ACE = 55^\circ$ ， $\angle BCD = 155^\circ$ ，则 $\angle BPD$ 的度数为（ ）。



- A. 110° B. 125° C. 130° D. 155°

【答案】C

【解析】 $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE$ (SSS)，
 $\therefore \angle A = \angle B$ ， $\angle BCE = \angle ACD$ ，
 $\therefore \angle BCA = \angle ECD$ ，
 $\because \angle ACE = 55^\circ$ ， $\angle BCD = 155^\circ$ ，
 $\therefore \angle BCA + \angle ECD = 100^\circ$ ，
 $\therefore \angle BCA = \angle ECD = 50^\circ$ ，
 $\because \angle ACE = 55^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACD = 105^\circ$
 $\therefore \angle A + \angle D = 75^\circ$ ，
 $\therefore \angle B + \angle D = 75^\circ$ ，
 $\because \angle BCD = 155^\circ$ ，
 $\therefore \angle BPD = 360^\circ - 75^\circ - 155^\circ = 130^\circ$ 。

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

练习4

13. 如果 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $\triangle DEF$ 的周长为13， $AB + BC = 7$ ，则 AC 的长（ ）。
- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】D

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $\triangle DEF$ 的周长为13，
 $\therefore \triangle ABC$ 的周长为13。

$$\therefore AB + BC + AC = 13.$$

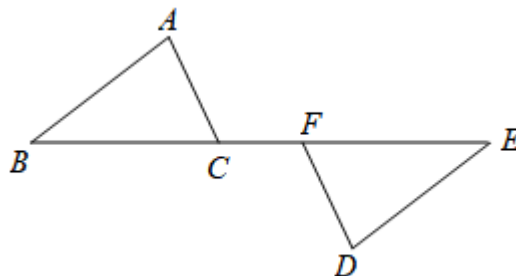
$$\text{又} \because AB + BC = 7,$$

$$\therefore AC = 6.$$

故选D.

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

14. 如图, 如果 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\triangle DEF$ 周长是32, $DE = 11\text{m}$, $EF = 13\text{m}$, 则 $AC =$ _____.



【答案】 8m

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle EFD$,

$$\therefore 32 - 11 - 13 = 8\text{m}.$$

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

15. 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $BC = EF = 4\text{cm}$, $\triangle ABC$ 的面积是 16cm^2 , 那么 $\triangle DEF$ 中 EF 边上的高是 _____ cm.

【答案】 8

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$, $BC = EF = 4\text{cm}$,

$\triangle ABC$ 的面积是 16cm^2 ,

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot h = 16, \text{ 即 } h = 8\text{cm},$$

则 $\triangle DEF$ 中 EF 边上的高为 8cm ,

故答案为: 8.

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

16. 已知 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $BC = EF = 10\text{cm}$, 若 $\triangle DEF$ 的面积是 40cm^2 , 则 $\triangle ABC$ 中 BC 边上的高是 _____ cm.

【答案】8

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF} = 40 \text{cm}^2.$$

设 BC 边上的高为 $h \text{cm}$.

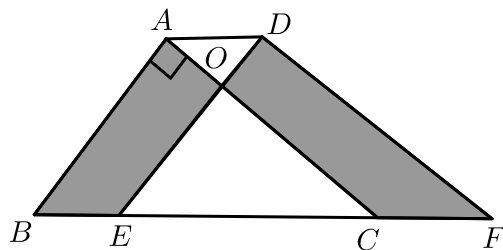
$$\because BC = 10 \text{cm},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h = \frac{1}{2} \times 10 \times h = 40,$$

$$\therefore h = 8.$$

【标注】【知识点】全等三角形的周长与面积

17. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, 将 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 向右平移2个单位得到 $\triangle DEF$, 连接 AD , 则下列结论: ① $AC \parallel DF$, $AC = DF$; ② $ED \perp DF$; ③四边形 $ABFD$ 的周长是16; ④ $S_{\text{四边形}ABEO} = S_{\text{四边形}CFDO}$; 其中结论正确的个数有().



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】D

【解析】①将 $\triangle ABC$ 沿直线 BC 向右平移2个单位得到 $\triangle DEF$,

$$\therefore AC \parallel DF.$$

$$\textcircled{2} \angle BAC = \angle EDF = 90^\circ,$$

$$\therefore ED \perp DF.$$

$$\textcircled{3} \text{四边形} ABFD \text{的周长} = AB + BC + CF + DF + AD = 16.$$

$$\textcircled{4} \because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DEF},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} - S_{\triangle OEC} = S_{\triangle DEF} - S_{\triangle OEC}.$$

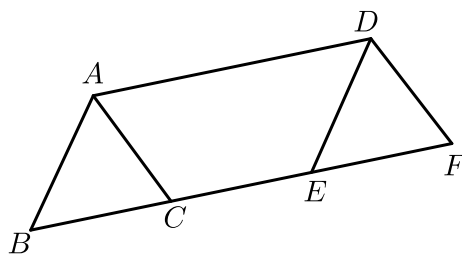
$$\therefore S_{\text{四边形}ABEO} = S_{\text{四边形}CFDO}.$$

那正确的结论有4个.

故选D.

【标注】【知识点】平移的性质

18. 如图，将面积为5的 $\triangle ABC$ 沿 BC 方向平移至 $\triangle DEF$ 的位置，平移的距离是边 BC 长的两倍，那么图中的四边形 $ACED$ 的面积为 _____ .



【答案】 15

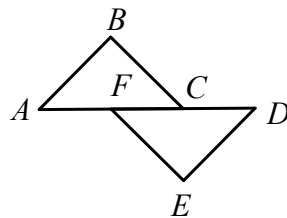
【解析】 设点 A 到 BC 的距离为 h ，则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h = 5$ ，
 $\therefore$ 平移的距离是 BC 的长的2倍，
 $\therefore AD = 2BC$ ， $CE = BC$ ，
 $\therefore$ 四边形 $ACED$ 的面积 $\frac{(AD + CE) \cdot h}{2} = \frac{3BC \cdot h}{2} = 3 \times 5 = 15$ ，
 故答案为：15 .

【标注】 【知识点】 平移的性质

二、 全等三角形的判定

练习5

19. 已知 $AB = DE$ ， $BC = EF$ ，若利用“SSS”证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，还需要添加的一个条件是 () .



- A. $AC = DC$ B. $AF = FD$ C. $DC = CF$ D. $AC = DF$

【答案】 D

【解析】 利用“SSS”证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，还需要添加的一个条件是 $AC = DF$ ，理由如下：
 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

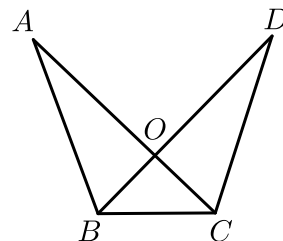
$$\begin{cases} AB = DE \\ BC = EF, \\ AC = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS) .

故选D .

【标注】【知识点】SSS

20. 如图，已知 $AB = CD$ ， $AC = DB$. 求证： $\angle A = \angle D$.



【答案】证明见解析 .

【解析】在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

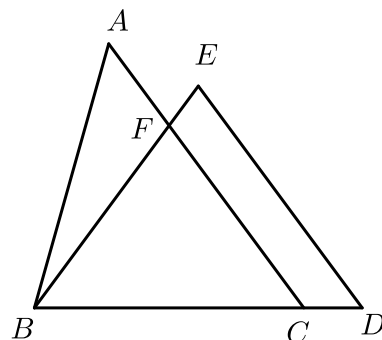
$$\because AB = DC, AC = DB, BC = CB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle A = \angle D.$$

【标注】【知识点】SSS

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 中，点C在边BD上，边AC交边BE于点F，若 $AC = BD$ ， $AB = ED$ ， $BC = BE$.



(1) 求证： $\angle ACB = \angle DBE$.

(2) 求证： $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AFB$.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析.

【解析】(1) 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEB$ 中,

$$\begin{cases} AC = DB \\ AB = DE, \\ BC = EB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEB$ (SSS).

$\therefore \angle ACB = \angle DBE$.

(2) $\because \angle AFB$ 是 $\triangle BFC$ 的外角,

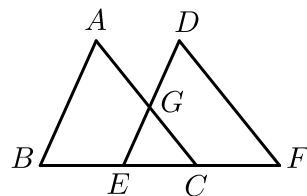
$\therefore \angle ACB + \angle DBE = \angle AFB$.

又 $\because \angle ACB = \angle DBE$.

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AFB$.

【标注】【知识点】SSS

22. 如图, 点 B, E, C, F 在一条直线上, $AB = DE, AC = DF, BE = CF, AC$ 与 DE 相交于点 G .



(1) 求证: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

(2) 求证: $\angle A = \angle EGC$.

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】(1) $\because BE = CF$,

$\therefore BE + EC = CF + EC$ 即 $BC = EF$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF, \\ BC = EF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (SSS).

(2) $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,

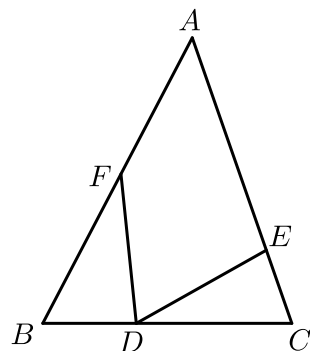
$\therefore \angle B = \angle DEF$,

$\therefore AB \parallel DE$,

$\therefore \angle A = \angle EGC$.

练习6

23. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 上一点, E, F 两点分别在 AC, AB 边上. 若 $\angle B = \angle C$, $BD = CE$, $CD = BF$, 则 $\angle EDF = (\quad)$.



- A. $90^\circ - \angle A$ B. $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ C. $180^\circ - 2\angle A$ D. $45^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

【答案】B

【解析】在 $\triangle FBD$ 和 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} BF = CD \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle FBD \cong \triangle DCE (\text{SAS}),$

$\therefore \angle BDF = \angle CED, \angle BFD = \angle CDE,$

在 $\triangle BFD$ 中, $\angle B + \angle BFD + \angle BDF = 180^\circ,$

$\therefore \angle B + \angle BDF + \angle EDC = 180^\circ,$

$\therefore \angle EDF + \angle BDF + \angle EDC = 180^\circ,$

$\therefore \angle EDF = \angle B,$

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B + \angle C + \angle A = 180^\circ$, 且 $\angle B = \angle C$,

$\therefore \angle B = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$

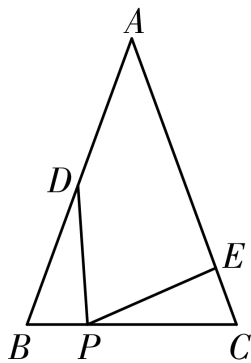
$\therefore \angle EDF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$

故选B.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】SAS

24. 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle A = 40^\circ$, $BP = CE$, $BD = CP$, 则 $\angle DPE = \underline{\hspace{1cm}}$ 度.

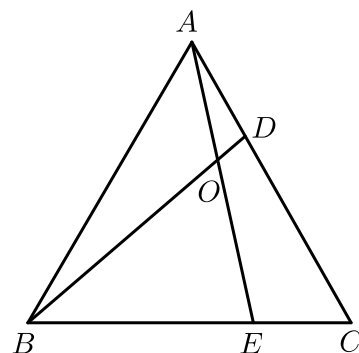


【答案】 70

【解析】 解： $\because AB = AC, \angle A = 40^\circ$ ，
 $\therefore \angle DBP = \angle ECP = 70^\circ$ ，
 又 $\because BP = CE, BD = CP$ ，
 $\therefore \triangle DBP \cong \triangle PCE$ ，
 $\therefore \angle BDP = \angle EPC$ ，
 又 $\because \angle DBP = 70^\circ$ ，
 $\therefore \angle DPB + \angle BDP = 110^\circ$ ，
 $\therefore \angle DPE = 180^\circ - (\angle DPB + \angle EPC) = 180^\circ - (\angle DPB + \angle BDP) = 70^\circ$ 。

【标注】 【知识点】 SAS

25. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， D, E 分别是 AC, BC 上的点，且 $AD = CE$ ， AE, BD 相交于点 O ，则 $\angle BOE$ 的度数为（ ）。



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 75°

【答案】 C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，
 $\therefore AB = AC, \angle BAD = \angle ACB = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle C, \\ AD = CE \end{cases}$$

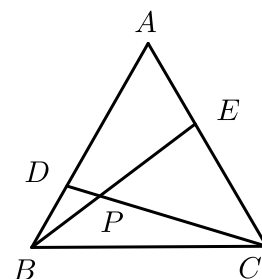
$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE$ (SAS) ,

$\therefore \angle ABD = \angle CAE$,

$\therefore \angle BOE = \angle ABD + \angle BAE = \angle CAE + \angle BAE = \angle BAC = 60^\circ$.

【标注】【知识点】等边三角形与全等

26. 如图，等边 $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分别在 AB 、 AC 上，且 $AD = CE$ ， BE 、 CD 交于点 P ，若 $\angle ABE : \angle CBE = 1 : 2$ ，则 $\angle BDP =$ _____ 度 .



【答案】 100

【解析】 等边 $\triangle ABC$ $\therefore \angle A = \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$, $AC = BC$,

$\therefore \angle ABE : \angle CBE = 1 : 2$,

$\therefore \angle CBE = \frac{2}{3} \angle ABC = 40^\circ$,

又 $\because AD = CE$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB$ (SAS) ,

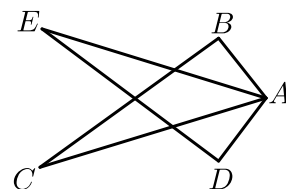
$\therefore \angle ACD = \angle CBE = 40^\circ$,

$\therefore \angle BDP = \angle BDC = \angle A + \angle ACD = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$.

【标注】【知识点】SAS；等边三角形的性质

27. 如图，已知 $AB = AD$, $AC = AE$, $\angle BAE = \angle DAC$.

求证： $\angle E = \angle C$.



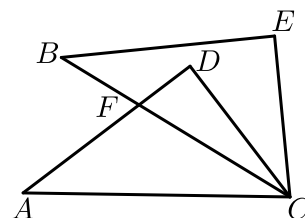
【答案】证明见解析 .

【解析】 $\because \angle BAC = \angle BAE + \angle EAC$,
 $\angle DAE = \angle DAC + \angle EAC$,
且 $\angle BAE = \angle DAC$,
 $\therefore \angle BAC = \angle DAE$,
 $\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中 ,
$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAE , \\ AC = AE \end{cases}$$

 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE (\text{SAS})$,
 $\therefore \angle C = \angle E$.

【标注】【知识点】 SAS

28. 已知：如图， $\angle ACB = \angle DCE$ ， $AC = BC$ ， $CD = CE$ ， AD 交 BC 于点 F ，连接 BE .



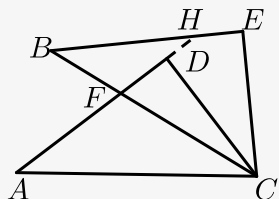
(1) 求证： $\triangle ACD \cong \triangle BCE$.

(2) 延长 AD 交 BE 于点 H ，若 $\angle ACB = 30^\circ$ ，求 $\angle BHF$ 的度数 .

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 30° .

【解析】(1) $\because \angle ACB = \angle DCE$,
 $\therefore \angle ACB + \angle DCB = \angle DCE + \angle DCB$,
即 $\angle ACD = \angle BCE$,
 $\because CA = CB$, $CD = CE$,
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (\text{SAS})$.
(2) $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE$,
 $\therefore \angle A = \angle B$,
 $\because \angle BFH = \angle AFC$,
 $\therefore \angle BHF = \angle ACB = 30^\circ$.



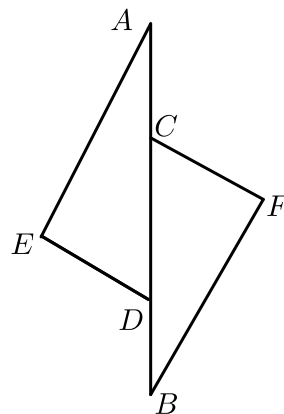
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】SAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

练习7

29. 如图，已知 $AE \parallel BF$, $\angle E = \angle F$ ，要使 $\triangle ADE \cong \triangle BCF$ ，可添加的条件是 _____ .



【答案】 $AE = BF$ (此题答案不唯一)

【解析】 $\because AE \parallel BF$,

$\therefore \angle A = \angle B$,

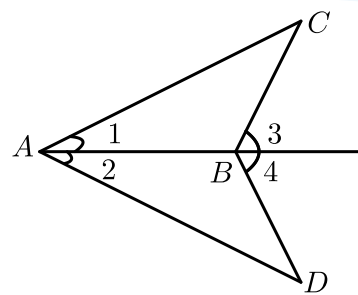
又 $\because \angle E = \angle F, AE = BF$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF (ASA)$.

故填 $AE = BF$ (此题答案不唯一) .

【标注】【知识点】ASA

30. 如图， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ ，求证： $AC = AD$.



【答案】证明见解析 .

【解析】方法一： $\because \angle 3 = \angle 4$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD ,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ AB = AB \\ \angle ABC = \angle ABD \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD (\text{ASA}) .$$

$$\therefore AC = AD .$$

方法二： $\because \angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$,

$$\text{又} \because \angle C = \angle 3 - \angle 1 , \angle D = \angle 4 - \angle 2 ,$$

$$\therefore \angle C = \angle D ,$$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ADB$ 中 ,

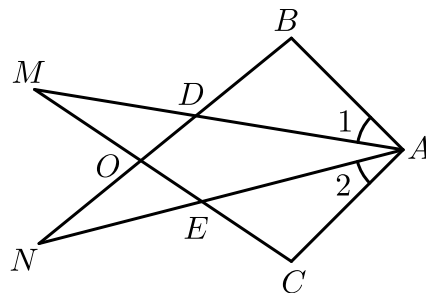
$$\therefore \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle C = \angle D , \\ AB = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle ADB (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore AC = AD .$$

【标注】【知识点】ASA

31. 已知 $\triangle ABN$ 和 $\triangle ACM$ 位置如图所示 , $AB = AC$, $AD = AE$, $\angle 1 = \angle 2$.



(1) 求证： $BD = CE$.

(2) 求证： $\angle M = \angle N$.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2 , \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS) ,

$\therefore BD = CE$.

(2) $\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle 1 + \angle DAE = \angle 2 + \angle DAE$,

即 $\angle BAN = \angle CAM$,

由(1)得 : $\triangle ABD \cong \triangle ACE$,

$\therefore \angle B = \angle C$,

在 $\triangle ACM$ 和 $\triangle ABN$ 中 ,

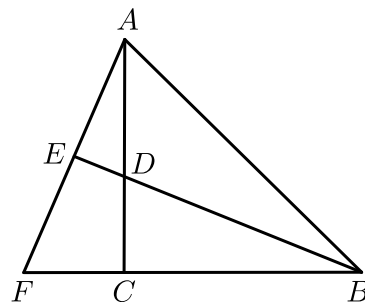
$$\begin{cases} \angle C = \angle B \\ AC = AB \\ \angle CAM = \angle BAN \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle ACM \cong \triangle ABN$ (ASA) ,

$\therefore \angle M = \angle N$.

【标注】【知识点】ASA

32. 如图 , 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 D 是 AC 上一点 , 过点 A 作 BD 的垂线交 BD 的延长线于点 E , 交 BC 的延长线于点 F , 且 $BD = 2AE$.



(1) 求证 : $\angle EAC = \angle DBC$.

(2) 求证 : BD 平分 $\angle ABC$.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because AE \perp BD$,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ = \angle C,$$

$$\because \angle EAC + \angle ADE = 90^\circ, \angle DBC + \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ADE = \angle BDC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle CBD.$$

(2) 方法一: 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAC = \angle DBC \\ AC = BC \\ \angle ACF = \angle BCD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AF = BD.$$

$$\because BD = 2AE, AE + EF = BD,$$

$$\therefore AE = FE, \text{ 即 } E \text{ 为 } AF \text{ 中点}$$

$$\because BE \perp AF,$$

$$\therefore BA = BF,$$

$$\therefore BD \text{ 平分 } \angle ABC.$$

方法二: 在 $\triangle ACF$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle FAC = \angle DBC \\ AC = BC \\ \angle ACF = \angle BCD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle BCD \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AF = BD.$$

$$\text{又} \because AF = 2AE, AE + EF = BD$$

$$\therefore AE = FE,$$

在 $\triangle BEA$ 和 $\triangle BEF$ 中,

$$\begin{cases} BE = BE \\ \angle BAE = \angle BEF \\ AE = FE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BEA \cong \triangle BEF \text{ (SAS)},$$

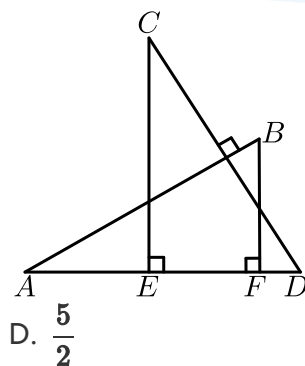
$$\therefore \angle FBC = \angle ABE,$$

$$\text{即 } BD \text{ 平分 } \angle ABC.$$

【标注】【知识点】ASA

练习8

33. 如图, $AB \perp CD$, 且 $AB = CD$, E 、 F 是 AD 上两点, $CE \perp AD$, $BF \perp AD$. 若 $CE = 8$, $BF = 6$, $AD = 10$, 则 EF 的长为 ().



A. 4

B. $\frac{7}{2}$

C. 3

D. $\frac{5}{2}$

【答案】A

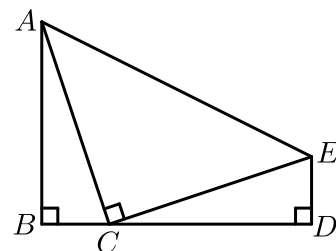
【解析】 $\because AB \perp CD, CE \perp AD,$
 $\therefore \angle C + \angle D = 90^\circ, \angle A + \angle D = 90^\circ,$
 $\therefore \angle A = \angle C, \text{ 且 } AB = CD, \angle AFB = \angle CED,$
 $\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE (\text{AAS}),$
 $\therefore BF = DE = 6, CE = AF = 8,$
 $\therefore AE = AD - DE = 10 - 6 = 4,$
 $\therefore EF = AF - AE = 8 - 4 = 4,$
 故选：A.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】AAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

34. 如图, $AC = CE, \angle ACE = 90^\circ, AB \perp BD, ED \perp BD, AB = 6\text{cm}, DE = 2\text{cm}$, 则 BD 等于 ().



A. 6 cm

B. 8 cm

C. 10 cm

D. 4 cm

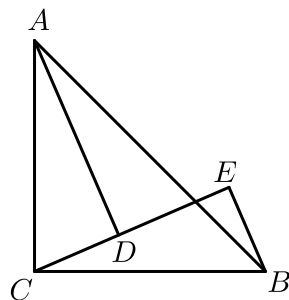
【答案】B

【解析】 $\because AB \perp BD, ED \perp BD,$
 $\therefore \angle B = \angle D = \angle ACE = 90^\circ,$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle BAC + \angle ACB = 90^\circ, \angle ACB + \angle ECD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAC = \angle ECD, \\
&\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 与 Rt}\triangle CDE \text{ 中}, \\
&\quad \begin{cases} \angle B = \angle D \\ \angle BAC = \angle DCE \\ AC = CE \end{cases} \\
&\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle CDE (\text{AAS}), \\
&\therefore BC = DE = 2\text{cm}, CD = AB = 6\text{cm}, \\
&\therefore BD = BC + CD = 2 + 6 = 8\text{cm}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】AAS

35. 如图, $AC \perp BC$, $BE \perp CE$, $AD \perp CE$, 垂足分别为 C , E , D , 若 $AC = BC$, $AD = 5$, $DE = 3$, 则 BE 的长为 _____.



【答案】2

【解析】 $\because AC \perp BC$, $BE \perp CE$, $AD \perp CE$,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle ADC = 90^\circ, \angle BEC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle CAD + \angle ACD = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ACD + \angle ECB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ECB,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle CEB \\ \angle CAD = \angle ECB \\ AC = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = CE, CD = BE,$$

$$\therefore CE = CD + DE,$$

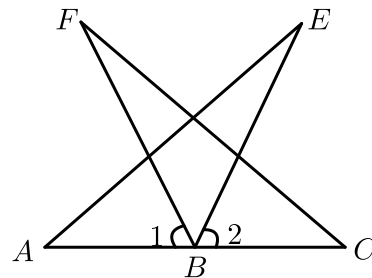
$$\therefore AD = BE + DE,$$

$$\therefore AD = 5, DE = 3,$$

$$\therefore BE = 2.$$

【标注】【知识点】AAS

36. 如图， B 是 AC 中点， $\angle F = \angle E$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ．证明： $AE = CF$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】 $\because B$ 是 AC 中点，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle FBE = \angle 2 + \angle EBF,$$

$$\text{即 } \angle ABE = \angle CBF,$$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CBF$ 中，

$$\begin{cases} \angle E = \angle F \\ \angle EBA = \angle FBC, \\ AB = CB \end{cases}$$

$$\triangle EBA \cong \triangle FBC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = CF.$$

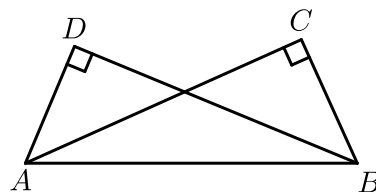
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】AAS

【知识点】全等三角形的性质

练习9

37. 如图， $AC \perp BC$ ， $BD \perp AD$ ， $AC = BD$ ，则判定 $\triangle ABC$ 与 $\triangle BAD$ 全等的依据是（ ）．



A. HL

B. SAS

C. ASA

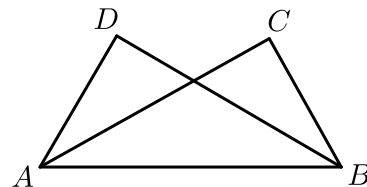
D. AAS

【答案】A

【解析】 $\because AC \perp BC$,
 $\therefore \angle C = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形 ,
 $\because BD \perp AD$,
 $\therefore \angle D = 90^\circ$,
 $\therefore \triangle DAB$ 为直角三角形 ,
在 $\text{Rt}\triangle DAB$ 和 $\text{Rt}\triangle CBA$ 中 ,
$$\begin{cases} AC = BD \\ AB = AB \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle DAB \cong \text{Rt}\triangle CBA(\text{HL})$.
故选A .

【标注】【知识点】HL

38. 如图 , $AC \perp BC$, $BD \perp AD$, $AC = BD$, 求证 : $BC = AD$.



【答案】证明见解析 .

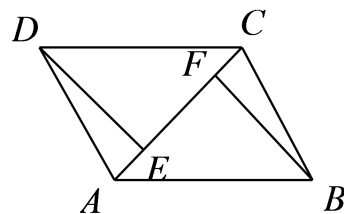
【解析】 $\because AC \perp BC$, $BD \perp AD$,
 $\therefore \angle ADB = \angle BCA = 90^\circ$,
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 和 $\text{Rt}\triangle BAC$ 中 ,
$$\begin{cases} BD = AC \\ AB = BA \end{cases}$$
 $\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle BAC(\text{HL})$,
 $\therefore BC = AD$.

【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】HL

39. 已知 : 如图 , $AB = CD$, $DE \perp AC$, $BF \perp AC$, E 、 F 是垂足 , $DE = BF$.

求证：



(1) $AF = CE$.

(2) $AB \parallel CD$.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because DE \perp AC, BF \perp AC$,

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = CD \\ DE = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ (HL) ,

$\therefore AF = CE$.

(2) 由 (1) 知 $\angle ACD = \angle CAB$,

$\therefore AB \parallel CD$.

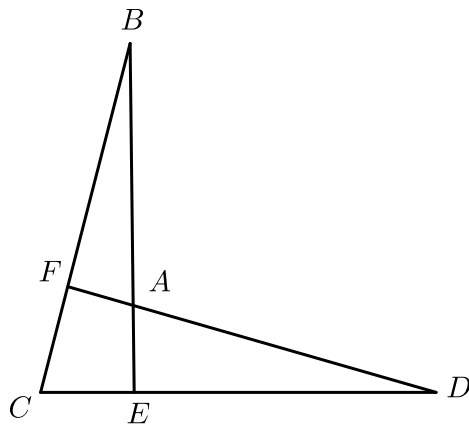
【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】HL

【知识点】平行线判定

【能力】推理论证能力

40. 已知： $BE \perp CD$ 于 E , $BE = DE$, $BC = DA$.



(1) 求证： $\triangle BEC \cong \triangle DEA$.

(2) 求证： $BC \perp FD$.

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

【解析】 (1) $\because BE \perp CD, BE = DE, BC = DA,$

$\therefore \triangle BEC \cong \triangle DEA(\text{HL}) .$

(2) $\because \triangle BEC \cong \triangle DEA,$

$\therefore \angle B = \angle D .$

$\because \angle D + \angle DAE = 90^\circ, \angle DAE = \angle BAF,$

$\therefore \angle BAF + \angle B = 90^\circ .$

即 $DF \perp BC$.

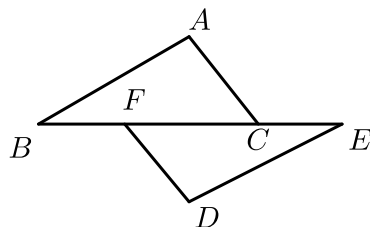
【标注】 【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】HL

【能力】推理论证能力

练习10

41. 如图，点 B, F, C, E 在一条直线上， $AB \parallel ED, AC \parallel FD$ ，那么添加下列一个条件后，仍无法判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 的是 () .



A. $\angle A = \angle D$

B. $AC = DF$

C. $AB = ED$

D. $BF = EC$

【答案】 A

【解析】 A 选项：添加 $\angle A = \angle D$ 不能判定 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，故A符合题意；

B 选项：添加 $AC = DF$ 可用AAS进行判定，故B不符合题意；

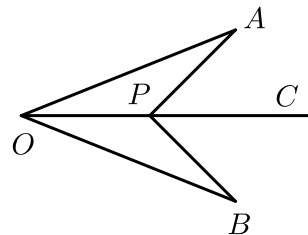
C 选项：添加 $AB = DE$ 可用AAS进行判定，故C不符合题意；

D 选项：添加 $BF = EC$ 可得出 $BC = EF$ ，然后可用ASA进行判定，故D不符合题意 .

故选 A .

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

42. 如图, 点 P 是 $\angle AOB$ 的角平分线 OC 上一点, 分别连接 AP 、 BP , 若再添加一个条件即可判定 $\triangle APO \cong \triangle BPO$, 则在以下条件中: ① $\angle A = \angle B$; ② $\angle APO = \angle BPO$; ③ $\angle APC = \angle BPC$; ④ $AP = BP$; ⑤ $OA = OB$, 不一定正确的是 _____. (只需填序号即可)



【答案】④

【解析】 $\because$ 点 P 是 $\angle AOB$ 的角平分线 OC 上一点,

$$\therefore \angle AOP = \angle BOP,$$

$$\therefore OP = OP,$$

① $\angle A = \angle B$, 根据 AAS 即可判断 $\triangle APO \cong \triangle BPO$,

② $\angle APO = \angle BPO$, 根据 ASA 即可判定 $\triangle APO \cong \triangle BPO$,

③ $\angle APC = \angle BPC$, 可知 $\angle APO = \angle BPO$, 即可判定 $\triangle APO \cong \triangle BPO$,

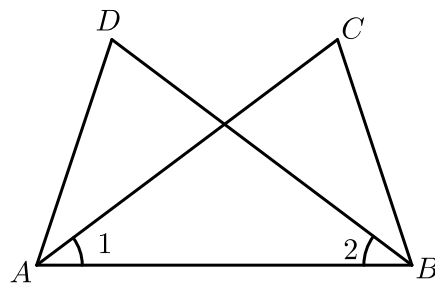
④ $AP = BP$, 不可判定 $\triangle APO \cong \triangle BPO$,

⑤ $OA = OB$, 根据 SAS 即可判定 $\triangle APO \cong \triangle BPO$.

故答案为④.

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

43. 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2$, 要说明 $\triangle ABC \cong \triangle BAD$.



(1) 若以 “SAS” 为依据, 则需添加一个条件是 _____.

(2) 若以 “AAS” 为依据 , 则需添加一个条件是 _____ .

(3) 若以 “ASA” 为依据 , 则需添加一个条件是 _____ .

【答案】 (1) $AC = BD$

(2) $\angle C = \angle D$

(3) $\angle ABC = \angle BAD$

【解析】 (1) $\because \angle 1 = \angle 2$,

$$AB = AB,$$

$$AC = BD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC (\text{SAS}) .$$

(2) $\because \angle 1 = \angle 2$,

$$\angle C = \angle D ,$$

$$AB = AB,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC (\text{AAS}) .$$

(3) $\because \angle 1 = \angle 2$,

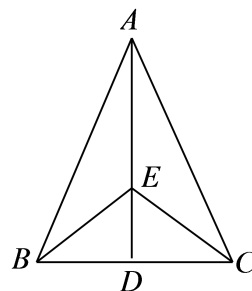
$$AB = AB,$$

$$\angle ABC = \angle BAD ,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BAC (\text{ASA}) .$$

【标注】【知识点】多解或多种判定混合

44. 如图 , $AB = AC$, $EB = EC$, AE 的延长线交 BC 于 D , 那么图中全等三角形有 _____ 对 .



【答案】 3

【解析】 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AC \\ AE = AE \\ BE = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACE (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAD$ 中,

$$\begin{cases} BA = CA \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AD = AD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAD (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = CD,$$

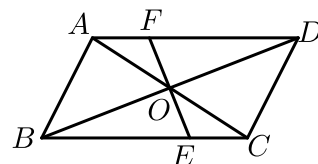
在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{cases} BE = CE \\ BD = CD \\ DE = DE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDE (\text{SSS}).$$

【标注】【知识点】全等三角形计数问题

45. 如图, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $OE = OF$, 图中全等三角形共有 _____ 对.



【答案】6

【解析】 $\because AD \parallel BC$, $OE = OF$,

$$\therefore \angle FAC = \angle BCA,$$

$$\text{又} \angle AOF = \angle COE,$$

$$\therefore \triangle AFO \cong \triangle CEO,$$

$$\therefore AO = CO,$$

进一步可得 $\triangle AOD \cong \triangle COB$, $\triangle FOD \cong \triangle EOB$, $\triangle ACB \cong \triangle ACD$, $\triangle ABD \cong \triangle DCB$, $\triangle AOB \cong \triangle COD$.

共有6对.

故答案为: 6.

【标注】【知识点】全等三角形计数问题